

§ 23 Maßtheorie

-176-

"Maße" sind allgemeine Konzepte,

unter die man z.B.

- Volumen - und Oberflächenmessung
von Teilmengen des $\mathbb{R}^3$

- Bestimmung der Wahrscheinlich-
keit eines Ereignisses

einordnen kann.

Standpunkt: Volumenmessung ist eine

Abbildung

$$\mu: \{ \text{Teilmengen des } \mathbb{R}^3 \} \rightarrow [0, \infty]$$

mit gewissen Eigenschaften, z.B.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(\emptyset) = 0, \quad \mu([0,1]^3) = 1, \\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \\ \text{für } \underline{\text{disjunkte}} \ A_i \subset \mathbb{R}^3; \end{array} \right.$$

Flächenmessung ist eine Abbildung

$$\lambda: \{ \underline{\text{2-dim. Mfkte}} \text{ in } \mathbb{R}^3 \} \rightarrow \underline{[0, \infty]}$$

mit entsprechenden natürlichen Eigenschaften.

Technische Vorbemerkungen

(zu Reihen mit Gliedern $\in [0, \infty]$)

- Seien $a_k \in [0, \infty]$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \sup \left\{ \sum_{k=0}^L a_k : L \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

wohldefiniert in $[0, \infty]$, und
der Wert hängt nicht von der
Anordnung der a_k ab.

- Sei I eine beliebige abzählbare
Indexmenge und $a_i \in [0, \infty]$ für
 $i \in I$. Man setzt

$$\sum_{i \in I} a_i := \sup \left\{ \sum_{j \in J} a_j : \right. \\ \left. J \subset I, \#J < \infty \right\}.$$

Dann ist

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$$

für eine beliebige Bijektion $\sigma: \mathbb{N}_0 \rightarrow I$.

- Die Summe über die leere Indexmenge ist definitionsgemäß 0.

Def 23.1 : (der Begriff des äußeren Maßes
nach Caratheodory, 1873-1950)

Sei X eine beliebige Menge. Ein

(äußeres) Maß auf X ist eine

Abbildung $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$

mit

$$(i) \mu(\emptyset) = 0$$

(ii) Ist $A \subset X$ und

höchstens $A \subset \bigcup_{i \in I} B_i$

mit abzählbar vielen Mengen $B_i \subset X$,

so folgt

$$\mu(A) \leq \sum_{i \in I} \mu(B_i)$$

(σ - Subadditivität)

Bem: 1.) μ -Nullmengen A sind solche
mit $\mu(A) = 0$.

2.) Bdg. (ii) liefert die

Monotonie : $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

(setze $B_k := \begin{cases} B, & k=0 \\ \emptyset, & k \in \mathbb{N} \end{cases}) \quad -181-$

und entsprechend die

endliche Subadditivität :

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

für $A_1, \dots, A_n \subset X$.

3.) Es gibt ein natürliches Teilsystem
 $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, so dass gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_n \in \mathcal{M} \text{ für } n \in \mathbb{N}, \quad B_n \cap B_m = \emptyset \\ \text{für } n \neq m \end{array} \right. \Rightarrow \mu \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Man nennt $\mu|_{\mathcal{M}}$ dann ein Maß.

Wir betrachten zur Vereinfachung
 am Anfang äußere Maße, d.h. $\mu(A)$
 ist für alle $A \subset X$ erklärt, dafür
 hat man aber nur σ -Subadditivität.

Beispiele: Sei X eine beliebige Menge.

1.) „triviales Maß“: $\mu \equiv 0$

2.) Dirac-Maß in $a \in X$:

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $A \subset X$.

Maßeigenschaften: $\delta_a(\emptyset) = 0 \quad \checkmark$

gelte etwa

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Fall 1: $a \notin A$

$$\Rightarrow 0 = \delta_a(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_a(B_i)$$

Fall 2: $a \in A$

$$\Rightarrow a \in B_{i_0} \text{ für ein } i_0 \Rightarrow 1 = \delta_a(A) =$$

$$\delta_a(B_{i_0}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_a(B_i)$$

3.) Das Zählmaß :

$$\boxed{\gamma(A) := \#A}$$

(Anzahl der Elemente)

(offenbar kann i. a. $\gamma(A) = \infty$ sein)

Die Maßeigenschaften von γ ergeben sich aus

"Übung: Sei $\varphi: X \rightarrow [0, \infty]$ - 184 -

beliebig. Für $A \subset X$ setze

$$\mu_{\varphi}(A) := \sup \left\{ \sum_{x \in E} \varphi(x) : E \subset A, \# E < \infty \right\}.$$

Zeige: μ_{φ} ist ein Maß

$$(\varphi \equiv 1 \implies \mu_{\varphi} = \text{Zählmaß})$$

Zeige weiter:

$$\mu_{\varphi} \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \sum_{i \in I} \mu_{\varphi}(B_i)$$

für jede abzählbare Familie disjunkter

Mengen B_i .

□

Das nächste Beispiel ist weniger trivial:

-185-

Das eindimensionale Lebesgue Maß $\mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}$

Ziel : definiere ein Maß μ auf $\mathbb{R}$,

so dass für $a < b$

$$\mu([a, b]) = \mu((a, b)) =$$

$$\mu([a, b]) = \mu([a, b)) = b - a$$

Idee : "überdecke" $A \subset \mathbb{R}$ möglichst gut
mit Intervallen

Def 23.2 : Das 1-dim. Lebesgue Maß
von $A \subset \mathbb{R}$ ist

$$\mathcal{L}^1(A) := \inf \left\{ \sum_{j \in I} (b_j - a_j) : \right.$$

$$A \subset \bigcup_{j \in I} [a_j, b_j], \quad I \text{ abzählbar} \Big\}$$

$\nwarrow$
höchstens

Satz 23.1 : (i) $\mathcal{L}^1$ ist ein Maß auf $\mathbb{R}$.

(ii) $\mathcal{L}^1(J) = b - a$ für beliebige

Intervall J mit Endpunkten

$$-\infty \leq a \leq b \leq \infty.$$

(iii) $A \subset \mathbb{R}$ offen, $A \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{L}^1(A) > 0$.

(iv) $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$ und $\mathcal{L}^1(N) = 0$

für jede abzählbare Teilmenge N von $\mathbb{R}$.

Beweis : (i) $\phi \subset [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^1(\phi) \leq 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{L}^1(\phi) = 0.$$

Def von $\mathcal{L}^1$

Seien $A, B_n \subset \mathbb{R}$ mit $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

(1)